Cut the Cake — Description

- 有一块半径为 R 的蛋糕，蛋糕的不同位置甜度不一样，点 (x,y) 处的甜度可以用函数 $\rho(x, y)=Ax^2+By^2$ 来表示．现在要切蛋糕，有两类刀．
- 第一类为圆形 (半径为 1,2,...,R-1)，切下去之后会把圆形蛋糕分成一个圆环形蛋糕和另一个圆形蛋糕，会把一个圆环形分成两个圆环形蛋糕，最多切 R-1 个位置．
- 第二类为线形 (长度恰好为 R)，每次都是沿时钟整点方向，最多切 12 个位置．
- 我们需要切 K 次，每块蛋糕的甜度可以用二重积分搞出来．然后求一种切法，使得得到的 N 块蛋糕的均方差最小．

Cut the Cake — Solution

- 首先，我们对应的 S(i)

$$
\begin{aligned}
S_i &= \int_\alpha^\beta \int_{r_1}^{r_2} \rho(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \int_{r_1}^{r_2} A(r\cos\theta)^2 + B(r\sin\theta)^2 r\,dr\,d\theta \\
&= \int_\alpha^\beta A(\cos\theta)^2 + B(\sin\theta)^2 d\theta \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr \\
&= \left(\frac{A+B}{2}\theta + \frac{A-B}{4}\sin 2\theta \Big|_\alpha^\beta\right)\left(\frac{r^4}{4}\Big|_{r1}^{r2}\right) \\
&= \frac{r_2^4 - r_1^4}{4}\left(\frac{(A+B)(\beta-\alpha)}{2} + \frac{A-B}{2}\sin(\beta-\alpha)\cos(\alpha+\beta)\right)
\end{aligned}
$$

- 这个式子有一个性质，可以优化算法，下面再讲

Cut the Cake — Solution

- 然后，我们来化简一下这个均方差公式，得到

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}(\sum_{i=1}^{N} S_i^2) - (\overline{S})^2$$

- 注意到，如果我们能确定 N，答案就只和平方和的大小有关了.
- 关键是我们如何才能确定 N?

Cut the Cake — Solution

- 注意观察题目的数据范围，我们知道第一类刀最多切 99 次，而第二类刀最多切 12 次．然后就可以想到枚举第二类刀切的位置．

- 假设第二类刀切了 a 次，那么 N=a*(K-a+1)，这里还需要注意 a=0 和 a=1 的情况是一样的，特判一下就好了．

Cut the Cake — Solution

- 接下来的问题就是如何求最小平方和了 .
- 对于这个，我们很容易想到用 dp.
- 设 dp[i][r1] 表示半径为 r1 的蛋糕划分为 i 部分的最小平方和 , dp 方程很简单：

$$dp[i][r1]=\min\{dp[i][r1], dp[i-1][r2]+sum[r2][r1]\}$$

- sum[r2][r1] 表示这个圆环用第二类刀划分的平方和，这个可以在枚举的同时处理出来 .
- 这个算法复杂度是 O(2^12*R^3)，显然超时

Cut the Cake — Solution

- 为了优化 dp，我们回到那个 S(i) 的公式

$$
\begin{aligned}
S_i &= \int_\alpha^\beta \int_{r_1}^{r_2} \rho(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \int_{r_1}^{r_2} A(r\cos\theta)^2 + B(r\sin\theta)^2 r\,dr\,d\theta \\
&= \int_\alpha^\beta A(\cos\theta)^2 + B(\sin\theta)^2 d\theta \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr \\
&= \left(\frac{A+B}{2}\theta + \frac{A-B}{4}\sin 2\theta\Big|_\alpha^\beta\right)\left(\frac{r^4}{4}\Big|_{r_1}^{r_2}\right) \\
&= \frac{r_2^4 - r_1^4}{4}\left(\frac{(A+B)(\beta-\alpha)}{2} + \frac{A-B}{2}\sin(\beta-\alpha)\cos(\alpha+\beta)\right)
\end{aligned}
$$

- 观察到，括号内部分和 r1 或者 r2 没有任何关系 . 换句话说就是第一类刀的切法和第二类刀的切法是独立的。

Cut the Cake — Solution

- 然后，我们就可以在一开始 dp 预处理一下第一类刀的切法 . dp[i][j] 表示半径为 j，切 i 次

$$dp[i][j]=\min\{dp[i][j], dp[i-1][k]+(j^4-k^4)^2\}$$

- 接下来枚举第二类刀的切法，求出式子括号内的部分，计为 ret. 答案就是

$$\min(\mathrm{sqrt}(ret*dp[K-a][R]/N-ave*ave))$$

- a 就是前文讲的那个 , ave 就是 S(i) 的平均值
- 这样时间复杂度就是 O(100^3+T*2^12*12), T 为测试数据组数，能够很快出解 .

Cut the Cake — Note

1) 由于精度问题，计算过程会出现根号内为负数的情况，需要在输出答案的时候特判一下.

2) 还是精度问题吧，在计算过程中会出现根号内是一个差不多 1e-12 的数，这个时候答案应该是为 0，但是输出结果和 0 差了很多，也需要特判一下.

3) 计算二重积分的时候，需要注意 θ 的范围是 [0, 2π]，不过由于计算方法的不同，可能不需要注意这点.

Cut the Cake — Note

- 对于方差为零的数据，由于精度问题，导致输出结果不为零，我们需要特判。。。总共有这几种情况
- K==0， K==1， K==2， K==4
- (A==B&&K%3==0&&K<=12&&K!=9)
- 这些情况均需要输出 0